

СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСА

Проф. др. Авыт АСАНОВ

Кыргызско-Турецкий университет «Манас»

Введение и предварительные результаты

В общем случае системы интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса не сводятся к системе интегральных уравнений Вольтерра, так как интеграл Стильтьеса не всегда сводится к интегралу Римана или интегралу Лебега [1]. Поэтому изучение систем интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса представляет самостоятельный интерес. Исследованию систем интегральных уравнений Вольтерра посвящено большое количество работ [2-6]. Скалярные интегральные уравнения Вольтерра-Стильтьеса исследованы в работе [8]. В этой работе, с помощью понятия производной по возрастающей функции изучены системы интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса первого и второго рода. Понятие производной по возрастающей функции введено в работу автора [7].

В данной работе все интегралы понимаются в смысле Стильтьеса.

ЛЕММА 1.1. Пусть $x(t)$ - возрастающая непрерывная функция на $[a, b]$, для каждого фиксированного $t \in (a, b]$, функция $g(t, s)$ по s имеет ограниченное изменение на $[a, t]$, функции $f(t, s)$ и $g_{x(s)}(t, s)$ непрерывные функции в области $G = \{(t, s) / a \leq s \leq t \leq b\}$, где

$$g_{x(s)}'(t, s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{g(t, s + \Delta s) - g(t, s)}{x(s + \Delta s) - x(s)}.$$

Тогда справедлива формула

$$\int_a^t f(t, s) d_s [g(t, s)] = \int_a^t f(t, s) g_{x(s)}'(t, s) dx(s), \quad (1.1)$$

где $t \in (a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим $[a, t]$ на части точками $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$, выберем в пределах каждого частичного сегмента $[t_k, t_{k+1}]$ по точке ξ_k и составим сумму

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t, \xi_k) [g(t, t_{k+1}) - g(t, t_k)].$$

Если $\lambda = \max(t_{k+1} - t_k)$, то по определению интеграла Стильтьеса имеем

$$\int_a^t f(t, s) d_s [g(t, s)] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n(t), \quad (1.2)$$

где предел не зависит от способа дробления, ни от выбора точек ξ_k .

Для каждого частичного сегмента $[t_k, t_{k+1}]$ применяя обобщенные теоремы Лагранжа [7], имеем

$$g(t, t_{k+1}) - g(t, t_k) = g'_{x(s)}(t, h_k)[x(t_{k+1}) - x(t_k)], \quad (1.3)$$

где $h_k \in \hat{I}(t_k, t_{k+1})$.

Учитывая (1.3) и выбирая $x_k = h_k$ из (1.2) получим требуемую формулу (1.1). Лемма 1.1 доказана.

Через A^T обозначим транспонированную матрицу к матрице A . Обозначим через $\|A\|$ и $\|u\|$ нормы соответственно для $n \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$ и для n -мерного вектора $u = (u_i)$ т.е.

$$\|A\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|u\| = \sum_{i=1}^n |u_i|.$$

Будем обозначать через $C_n[a, b]$ пространства n -мерных вектор функций с элементами из $C[a, b]$ и $C_m(G)$ – пространства $n \times n$ -мерных матричных функций с элементами из $C(G)$. Известно, что пространства $C_n[a, b]$ и $C_m(G)$ являются банаховыми пространствами с нормой

$$\|u(t)\|_C = \sup_{t \in [a, b]} \|u(t)\|, \quad \|A(t)\|_C = \sup_{t \in G} \|A(t)\|,$$

где $u(t) \in C_n[a, b]$, $A(t) \in C_m(G)$.

2. Система линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса второго рода

Рассмотрим системы:

$$u(t) = \int_a^t A(t, s) [u^T(s) d_s B(t, s)]^T + f(t), \quad (2.1)$$

где $t \in \hat{I}[a, b]$, $A(t, s)$ и $B(t, s)$ – $n \times n$ -мерные известные матричные функции, $f(t)$ – n -мерная известная вектор-функция и $u(t)$ – n -мерная неизвестная вектор-функция.

ЛЕММА 2.1. Пусть $x(t)$ – возрастающая непрерывная функция на $[a, b]$,

$A(t, s)$ и $B'_{x(s)}(t, s)$ – $n \times n$ -мерные непрерывные матричные функции на G , где $B'_{x(s)}(t, s) = (b'_{ij}(t, s))'_{x(s)}$ является производной от $B(t, s) = (b_{ij}(t, s))$ по $x(s)$. Тогда система (2.1) эквивалентна к следующей системе

$$u(t) = \int_a^t K(t, s) u(s) dx(s) + f(t), \quad (2.2)$$

где $t \in \hat{I}[a, b]$,

$$K(t, s) = A(t, s) (B'_{x(s)}(t, s))^T.$$

Доказательство вытекает из леммы 1.1.

Далее в силу леммы 2.1 будем рассматривать систему (2.2). Пусть $n \times n$ -мерное матричное ядро $K(t, s)$ является непрерывной матричной функцией на G и

Система интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса

$$M = \sup_{(t,s) \in G} \|K(t, s)\|. \quad (2.3)$$

Тогда решение $R(t, s) = (R_{ij}(t, s))$ следующего матричного интегрального уравнения

$$R(t, s) = \int_s^t K(t, \tau) R(\tau, s) d\tau + K(t, s), \quad (t, s) \in G, \quad (2.4)$$

будем называть резольвентой матричного ядра $K(t, s)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $x(t)$ - возрастающая непрерывная функция на $[a, b]$, $K(t, s) \in C_{nn}(G)$ и $f(t) \in C_n[a, b]$. Тогда

1) матричное уравнение (2.4) имеет единственное решение $R(t, s)$ в пространстве $C_{nn}(G)$;

2) система (2.2) имеет единственное решение $u(t)$ в пространстве $C_n[a, b]$ и $u(t)$ представимо в виде

$$u(t) = f(t) + \int_a^t R(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b]. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Сначала докажем единственность решения матричного уравнения (2.4). Пусть $R_1(t, s)$ и $R_2(t, s)$ - произвольные два решения матричного уравнения (2.4) из пространства $C_{nn}(G)$. Тогда

$$R_1(t, s) - R_2(t, s) = \int_s^t K(t, \tau) [R_1(\tau, s) - R_2(\tau, s)] d\tau, \quad (t, s) \in G.$$

Из этого матричного уравнения, имеем

$$\|R_1(t, s) - R_2(t, s)\| \leq \int_s^t M \|R_1(\tau, s) - R_2(\tau, s)\| d\tau + \frac{1}{m},$$

где $(t, s) \in G$, $m \in \mathbb{N}$ - множество натуральных чисел, M - определено по формуле (2.3). Отсюда, применяя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана [8, теорема 1.3] получим

$$\|R_1(t, s) - R_2(t, s)\| \leq \frac{1}{m} \exp\{M[x(b) - x(a)]\},$$

для всех $(t, s) \in G$, $m \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, из последнего неравенства имеем $R_1(t, s) = R_2(t, s)$ при всех $(t, s) \in G$.

Далее, докажем существование решения матричного уравнения (2.4) в пространстве $C_{nn}(G)$. Для решения матричного уравнения (2.4) применим метод последовательных приближений:

$$R_0(t, s) = K(t, s),$$

$$R_m(t, s) = \int_s^t K(t, \tau) R_{m-1}(\tau, s) dx(\tau) + K(t, s), \quad (2.6)$$

где $m \in \mathbb{N}$. Методом математической индукции, из (2.6) получим следующие оценки:

$$\|R_0(t, s)\| \leq M, \\ \|R_m(t, s) - R_{m-1}(t, s)\| \leq M^{m+1} \frac{[x(t) - x(s)]^m}{m!} \quad (2.7)$$

где $(t, s) \in G$, $m \in \mathbb{N}$. Из оценки (2.7) имеем

$$\sup_{(t,s) \in G} \|R_m(t, s) - R_{m-1}(t, s)\| \leq M^{m+1} \frac{[x(b) - x(a)]^m}{m!} \quad (2.8)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$. В силу оценки (2.8) следует, что функциональный ряд

$$R_0(t, s) + \sum_{m=1}^{\infty} [R_m(t, s) - R_{m-1}(t, s)],$$

в области G равномерно сходится к $R(t, s)$ и $R(t, s)$ является единственным решением матричного уравнения (2.4) из банахова пространства $C_m(G)$.

2) Сначала докажем единственность решения системы (2.2). Для этого нам достаточно доказать, что система (2.2) для $f(t) \equiv 0$ имеет только нулевое решение из $C_n[a, b]$. Пусть $f(t) \equiv 0$ в области $[a, b]$. Тогда, из системы (2.2) имеем

$$\|u(t)\| \leq \int_a^t M \|u(s)\| dx(s) + \frac{1}{m},$$

где $t \in [a, b]$, $m \in \mathbb{N}$. Отсюда, применяя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана [8, теорема 1.3] и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ получим, что $u(t) \equiv 0$ в области $[a, b]$.

Далее, докажем что вектор-функция $u(t)$ определенная по формуле (2.5) является единственным решением системы (2.2) из пространства $C_n[a, b]$. Из (2.5) нетрудно убедиться, что если $f(t) \in C_n[a, b]$, то $u(t) \in C_n[a, b]$. Подставляя формулу (2.5) в систему (2.2), применяя обобщенную формулу Дирихле [8, теорема 1.2] и учитывая, что $R(t, s)$ является решением матричного уравнения (2.4), получим

$$\int_{t_0}^t [R(t, s) - \int_s^t K(t, \tau) R(\tau, s) dx(\tau) - K(t, s)] f(s) dx(s) = 0,$$

для всех $t \in [a, b]$. Теорема 2.1 доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполняются все условия теоремы 2.1. Тогда

1) для решения $R(t, s)$ матричного уравнения (2.4) справедлива оценка

$$\|R(t, s)\| \leq M \exp \{M[x(t) - x(s)]\}, \quad (t, s) \in G,$$

где M определено по формуле (2.3);

Система интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса

2) для решения $u(t)$ системы (2.2) справедлива оценка

$$\|u(t)\|_C = \sup_{t \in [t_0, T]} \|u(t)\| \leq C_0 \|f(t)\|_C, \quad (2.9)$$

где

$$C_0 = \exp \{M [x(b) - x(a)]\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из (2.4), имеем

$$\|R(t, s)\| \leq \int_s^t M R(t, s) dx(t) + M(t, s) \hat{I} G.$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана [8] получим требуемую оценку

2) Из (2.2), имеем

$$\|u(t)\| \leq \int_a^t M \|u(s)\| dx(s) + \|f(t)\|_C, \quad t \in [a, b].$$

Отсюда, используя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана [8] получим требуемую оценку (2.9). Теорема 2.2 доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $K(t, s) = A(t) B(s)$, где $A(t)$ и $B(t)$ – $n \times n$ -мерные непрерывные матричные функции в $[a, b]$.

Тогда

1) решение $R(t, s)$ матричного уравнения (2.4) определяется по формуле

$$R(t, s) = A(t) X(t, s) B(s), \quad (t, s) \in \bar{G}, \quad (2.10)$$

где $X(t, s)$ является решением следующего матричного уравнения

$$X(t, s) = \int_s^t B(\tau) A(\tau) X(\tau, s) dx(\tau) + I_n, \quad (2.11)$$

I_n – $n \times n$ -мерная единичная матрица;

2) решение $u(t)$ системы (2.2) определяется по формуле

$$u(t) = f(t) + \int_a^t A(t) X(t, s) B(s) f(s) dx(s), \quad (2.12)$$

где $t \in [a, b]$, $X(t, s)$ является решением матричного уравнения (2.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Проверим, что $R(t, s)$ определенное по формуле (2.10) удовлетворяет систему (2.4). В самом деле

$$A(t) \{X(t, s) - \int_s^t B(\tau) A(\tau) X(\tau, s) dx(\tau) - I_n\} B(s) = 0$$

при всех $(t, s) \in \bar{G}$. Так как $X(t, s)$ является решением матричного уравнения (2.11).

2) Справедливость формулы (2.12) вытекает, из формулы (2.5) (теорема 2.1) и (2.10). Теорема 2.3 доказана.

3. Система нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса второго рода

Рассмотрим системы

$$u(t) = \int_a^t K(t, s, u(s)) dx(s) + f(t), \quad t \in [a, b], \quad (3.1)$$

где $K(t, s, u)$ и $f(t)$ – n -мерные известные вектор-функции, $u(t)$ – неизвестная n -мерная вектор-функция, $x(t)$ – возрастающая непрерывная функция на $[a, b]$.

Будем говорить, что для n -мерной вектор-функции $K(t, s, u)$ выполнено условие (A), если: $\|K(t, s, 0)\|$ – ограниченная функция в G и $K(t, s, u)$ по u удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом L , т.е. для любых $(t, s, u_1), (t, s, u_2) \in \bar{G} \subset R^n$

$$\|K(t, s, u_1) - K(t, s, u_2)\| \leq L \|u_1 - u_2\|.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполняется условие (A) и $f(t) \in C_n[a, b]$. Тогда

- 1) система (3.1) имеет единственное решение в пространстве $C_n[a, b]$;
- 2) если $u_1(t)$ является решением системы (3.1) при $f(t) = f_1(t) \in C_n[a, b]$ и $u_2(t)$ является решением системы (3.1) при $f(t) = f_2(t) \in C_n[a, b]$, то справедлива оценка

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_C \leq C \|f_1(t) - f_2(t)\|_C, \quad (3.2)$$

где

$$C = \exp \{L[x(b) - x(a)]\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для решения системы (3.1) применим метод последовательных приближений:

$$u_0(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, 0) dx(s), \quad (3.3)$$

$$u_m(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u_{m-1}(s)) dx(s),$$

где $m \in \mathbb{N}$. Методом математической индукции с учетом условия (A) из (3.3) получим следующие оценки:

$$\|u_0(t)\| \leq \sup_{t \in [a, b]} \left\| f(t) + \int_a^t K(t, s, 0) dx(s) \right\| = N_0,$$

Система интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса

$$\|u_m(t) - u_{m-1}(t)\| \leq N_0 L^m \frac{[x(t) - x(a)]^m}{m!}$$

где $t \in [a, b]$, $m \in \mathbb{N}$. Из последней оценки следует, что функциональный ряд

$$u_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} [u_m(t) - u_{m-1}(t)]$$

в области $[a, b]$ равномерно сходится к $u(t) \in C_n[a, b]$ и $u(t)$ является решением системы (3.1). Единственность решения системы (3.1) вытекает из оценки (3.2). Докажем оценки (3.2).

2) Учитывая, что $u_1(t)$, $u_2(t)$ являются решением системы (3.1) соответственно для

$$f(t) = f_1(t), f(t) = f_2(t) \text{ и условие (A), из (3.1) имеем:}$$

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_C \leq \int_a^t L \|u_1(s) - u_2(s)\| dx(s) + \|f_1(t) - f_2(t)\|_C$$

при $t \in [a, b]$. Отсюда, в силу обобщенного неравенства Гронуолла-Беллмана [8] получим требуемую оценку (3.2).

4. Система линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса первого рода

Рассмотрим теперь следующие системы

$$\int_a^t A(t, s) [u^T(s) dx, B(t, s)]^T = f(t), \quad t \in [a, b], \quad (4.1)$$

где $A(t, s)$ и $B(t, s)$ — $n \times n$ -мерные известные матричные функции, $f(t)$ — n -мерная известная вектор-функция и $u(t)$ — n -мерная неизвестная вектор-функция на $[a, b]$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $x(t)$ — возрастающая непрерывная функция на $[a, b]$, $n \times n$ -мерные матричные функции $A(t, s)$, $\frac{\partial A(t, s)}{\partial x(t)}$, $\frac{\partial B(t, s)}{\partial x(s)}$, $\frac{\partial^2 B(t, s)}{\partial x(t) \partial x(s)}$, непрерывны в области \bar{G} и $\det \left[A(t, s) \frac{\partial B(t, s)}{\partial x(s)} \right]_{s=t} \neq 0$ при всех $t \in [a, b]$. Тогда, для

того чтобы система (4.1) имела единственное решение из $C_n[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $f(t)$ в $[a, b]$ имела непрерывное производное $f_{x(t)}(t)$ и $f(a) = 0$. В этом случае система (4.1) эквивалентна к следующей системе интегральных уравнений второго рода:

$$u(t) = - \int_a^t K^{-1}(t, t) \frac{\partial K(t, s)}{\partial x(t)} u(s) dx(s) + K^{-1}(t, t) f_{x(t)}(t), \quad (4.2)$$

где $t \in [a, b]$, $K^{-1}(t, t)$ обратная матрица к $K(t, t)$,

$$K(t, s) = A(t, s) \left(\frac{\partial B(t, s)}{\partial x(s)} \right)^T, \quad (t, s) \in \bar{G}. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия теоремы 4.1 и леммы 2.1, имеем что система (4.1) эквивалентна к следующей системе

$$\int_a^t K(t,s) u(s) dx(s) = f(t), \quad t \in \hat{I} [a, b], \quad (4.4)$$

где $K(t,s)$ определена по формуле (4.3). Ясно, что для того, чтобы система (4.1) имела непрерывное решение $u(t)$, необходимо выполнение условия $f(a) = 0$. В силу условия теоремы 4.1 и (4.3) вытекает что матричное ядро $K(t,s)$ в области G имеет непрерывную производную $\frac{\partial K(t,s)}{\partial x(t)}$. Поэтому, в силу теоремы 1.1 [8]

следует, что и $f(t)$ должна иметь непрерывную производную $f_{x(t)}'(t)$. Дифференцируя обе части (4.4) по $x(t)$ и учитывая теорему 1.1 [8], имеет

$$K(t,t)u(t) + \int_a^t \frac{\partial K(t,s)}{\partial x(t)} u(s) dx(s) = f_{x(t)}'(t), \quad (4.5)$$

где $t \in \hat{I} [a, b]$. Очевидно, что при выполнении условия теоремы 4.1, система (4.5) эквивалентна к система (4.1). Если $f_{x(t)}'(t) \in C_n [a, b]$, то в силу теоремы 2.1, система (4.2) имеет единственное решение из $C_n [a, b]$. Теорема 4.1 доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть матричная функция $K(t,s)$ в области G имеет непрерывные производные $\frac{\partial^m K(t,s)}{\partial x^m(t)}$, $m \geq 2$, $m \in \hat{I} N$,

$$K(t,t) \circ \left[\frac{\partial K(t,s)}{\partial x(t)} \Big|_{s=t} \right] \circ \dots \circ \left[\frac{\partial^{m-2} K(t,s)}{\partial x^{m-2}(t)} \Big|_{s=t} \right] \circ 0,$$

$$\det \left[\frac{\partial^{m-1} K(t,s)}{\partial x^{m-1}(t)} \Big|_{s=t} \right] \neq 0 \quad \text{при } (t,s) \in \hat{I} \bar{G},$$

где $K(t,s)$ определена по формуле (4.3). Тогда, для того чтобы система (4.1) т.е. (4.4) имела единственное решение из $C_n [a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $f(t)$ имела производную $f_{x(t)}^{(m)}(t)$ из $C_n [a, b]$ и $f(a) = f_{x(t)}'(a) = \dots = f_{x(t)}^{(m-1)}(a) = 0$. Кроме того, система (4.1) эквивалентна к следующей системе

$$u(t) = - \int_a^t M^{-1}(t) \frac{\partial^m K(t,s)}{\partial x^m(t)} u(s) dx(s) + M^{-1}(t) f_{x(t)}^{(m)}(t), \quad (4.6)$$

где $t \in \hat{I} [a, b]$, $M^{-1}(t)$ – обратная матрица к матрице

$$M(t) = \left[\frac{\partial^{m-1} K(t,s)}{\partial x^{m-1}(t)} \Big|_{s=t} \right], \quad t \in \hat{I} [a, b],$$

Система интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для фиксированного целого i из $[1, m-1]$, дифференцируем по $x(t)$ i раз систему (4.1) т.е. (4.4). Тогда, в силу условия теоремы 4.1 и в силу теоремы 1.1 [8], имеем

$$\int_a^t \frac{\partial^i K(t,s)}{\partial x^i(t)} u(s) dx(s) = f_{x(t)}^{(i)}(t), \quad (4.7)$$

где $t \in [a, b]$, $1 \leq i \leq m-1$, ясно, что системы (4.1) и (4.7i) эквивалентны. Отсюда вытекает, что $f_{x(t)}^{(i)}(a) = 0$. Дифференцируем системы (4.7i) при $i = m-1$.

Тогда, в силу условия теоремы 4.2, получим систему (4.6). Если $f_{x(t)}^{(m)}(t) \in C_n[a, b]$, то в силу теоремы 2.1 система (4.6) имеет единственное решение из $C_n[a, b]$. Теорема 4.2. доказана.

ПРИМЕР. Рассмотрим системы (4.1), для $n = 2, a = 0, b = 1$,

$$A(t, s) = \begin{pmatrix} t^2 - s^2 & (s^2 - t^2)(1+s) \\ 4(t^2 - s^2) & (t^4 - s^4)(1+s) \end{pmatrix},$$

$$B(t, s) = \begin{pmatrix} s^2 - \frac{1}{3}s^3 & 0 \\ 0 & s^2 - \frac{1}{3}s^3 \end{pmatrix}$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad \text{т.е.}$$

рассматривается следующая система

$$\int_0^t \begin{pmatrix} t^2 - s^2 & (s^2 - t^2)(1+s) \\ 4(t^2 - s^2) & (t^4 - s^4)(1+s) \end{pmatrix} [u^T(s) \, ds \, B(t,s)]^T = f(t), \quad (4.8)$$

где $t \in [0, 1]$. Ясно, что если выберем $x(t) = t^2$, то система (4.8) эквивалентна к следующей системе:

$$\int_0^t K(t, s) u(s) dx(s) = f(t), \quad (4.9)$$

где $t \in [0, 1]$

$$K(t, s) = \begin{pmatrix} t^2 - s^2 & (s^2 - t^2)(1+s) \\ 4(t^2 - s^2) & (t^4 - s^4)(1+s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}s & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2}s \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$K(t, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K'_{x(t)}(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & -1-s \\ 4 & 2t^2(1+s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}s & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{2}s \end{pmatrix},$$

$$K''_{x(t)}(t, s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(1+s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}s & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{2}s \end{pmatrix},$$

$$\det[K'_{x(t)}(t, s) |_{s=t}] = \begin{vmatrix} 1 & -(1+t) \\ 4 & 2t^2(1+t) \end{vmatrix} \frac{(2-t)^2}{4} = \\ = \frac{1}{4} (1+t)(4+2t^2)(2-t)^2 \neq 0,$$

при всех $t \in \tilde{I} [0, 1]$, т.е. для системы (4.8) выполняются все условия теоремы 4.2 при $m = 2$. Поэтому, в силу теоремы 4.2 система (4.8) имеет единственное решение из $C_2 [0, 1]$ тогда и только тогда, когда вектор-функция $f(t)$ имеет второе производное $f''_{x(t)}(t)$ из $C_2 [0, 1]$ и $f(0) = f'_{x(t)} |_{t=0} = 0$, где $x(t) = t^2$. В этом случае, дважды дифференцируя по $x(t) = t^2$, систему (4.8) сводим к следующей эквивалентной системе интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса второго рода:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1-t \\ 4 & 2t^2(1+t) \end{pmatrix} (1-\frac{1}{2}t) u(t) + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+s \end{pmatrix} (2-s) u(s) dx(s) = f''_{x(t)}(t), \quad t \in \tilde{I} [0, 1].$$

5. Система нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса первого рода.

Будем рассматривать следующие системы:

$$\int_a^t K(t, s, u(s)) dj(s) = f(t), \quad t \in \tilde{I} [a, b], \quad (5.1)$$

где $K(t, s, u)$ и $f(t)$ – n -мерные известные вектор-функции, $u(t)$ – неизвестная n -мерная вектор-функция, $x(t)$ – возрастающая непрерывная вектор-функция на $[a, b]$ и $j'_{x(t)}(t)$ – непрерывная функция на $[a, b]$.

Предположим выполнения следующих условий:

1. вектор-функции $K(t, s, u)$ и $\frac{\partial K(t, s, u)}{\partial x(t)}$ являются непрерывными в области

$$u_m(t) = F(t, \frac{1}{j'_{x(t)}(t)} [f'_{x(t)}(t) - \int_a^t \frac{\partial K(t,s,u_{m-1}(s))}{\partial x(t)} j'_{x(s)}(s) dx(s)]),$$

где $m \in \mathbb{N}$, $t \in [t_0, T]$.

Методом математической индукции с учетом условий 1 и 2, из (5.3) получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|u_0(t)\| &\leq \sup_{t \in [a,b]} \|F(t, \frac{1}{j'_{x(t)}(t)} [f'_{x(t)}(t) - \int_a^t \frac{\partial K(t,s,0)}{\partial x(t)} dj'_{x(s)}(s)]\| = F_0, \\ \|u_1(t) - u_0(t)\| &\leq \frac{L_0}{a} \int_a^t \|\frac{\partial K(t,s,u_0(s))}{\partial x(t)} - \frac{\partial K(t,s,0)}{\partial x(t)}\| M_0 dx(s) \leq \\ &\leq \frac{M_0}{a} L_0 L F_0 [x(t) - x(a)], \\ \|u_2(t) - u_1(t)\| &\leq \frac{L_0 M_0}{a} \int_a^t \|\frac{\partial K(t,s,u_1(s))}{\partial x(t)} - \frac{\partial K(t,s,u_0(s))}{\partial x(t)}\| dx(s) \leq \\ &\leq \frac{M_0}{a} L_0 L \int_a^t \|u_1(s) - u_0(s)\| dx(s) \leq \frac{M_0^2}{a^2} L_0^2 L^2 F_0 \int_a^t [x(s) - x(a)] dx(s) = \\ &= F_0 \frac{M_0^2}{a^2} L_0^2 L^2 \frac{[x(t) - x(a)]^2}{2!}, \\ \|u_m(t) - u_{m-1}(t)\| &\leq F_0 \frac{M_0^m}{a^m} (L_0 L)^m \frac{[x(t) - x(a)]^m}{m!}, \end{aligned}$$

где $m \in \mathbb{N}$, $t \in [t_0, T]$,

$$M_0 = \sup_{t \in [a,b]} |j'_{x(s)}(t)|.$$

Отсюда, имеем

$$\|u_m(t) - u_{m-1}(t)\| \leq F_0 \frac{M_0^m}{a^m} (L_0 L)^m \frac{[x(b) - x(a)]^m}{m!},$$

где $m \in \mathbb{N}$, $t \in [t_0, T]$.

Из последней оценки следует, что функциональный ряд

$$u_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} [u_m(t) - u_{m-1}(t)]$$

в области $[a, b]$ равномерно сходится к $u(t) \in C_n[a, b]$ и $u(t)$ является решением системы (5.2), т.е. (5.1). Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ - произвольные два решения системы (5.1) из пространства $C_n[a, b]$. Тогда

Система интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса

$$u_1(t) - u_2(t) = F(t, \frac{1}{j'_{x(t)}(t)} [f'_{x(t)}(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial K(t,s,u_1(s))}{\partial x(t)} dj(s)]) - F(t, \frac{1}{j'_{x(t)}(t)} [f'_{x(t)}(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial K(t,s,u_2(s))}{\partial x(t)} dj(s)]),$$

где $t \in [a, b]$. Отсюда, в силу условия 1 и 2, имеем

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq L_o L \frac{M_o}{a} \int_{t_0}^t \|u_1(s) - u_2(s)\| dx(s) + \frac{1}{m},$$

где $m \in N$, $t \in [t_0, T]$. Применяя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана, из последнего неравенства получим

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \frac{1}{m} \exp \left\{ \frac{M_o}{a} L_o L [x(b) - x(a)] \right\},$$

где $m \in N$, $t \in [t_0, T]$. Отсюда переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ имеем

$\|u_1(t) - u_2(t)\|_C = 0$, т.е. $u_1(t) = u_2(t)$ для всех $t \in [t_0, T]$. Теорема 5.1 доказана.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть выполняются условия 1, 2 и $u_1(t)$, $u_2(t)$ являются решением системы (5.1) соответственно $f(t) = f_1(t)$, $f(t) = f_2(t)$, где

$$(f_1(t))'_{x(t)} \in C_n[a, b], (f_2(t))'_{x(t)} \in C_n[a, b], f_1(t_0) = 0$$

и $f_2(t_0) = 0$. Тогда справедлива оценка

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_C \leq C_3 \| (f_1(t))'_{x(t)} - (f_2(t))'_{x(t)} \|_C, \quad (5.4)$$

где

$$C_3 = \frac{L_o}{a} \exp \left\{ \frac{M_o}{a} L_o L [x(b) - x(a)] \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что $u_1(t)$, $u_2(t)$ являются решением системы (5.1) соответственно для $f(t) = f_1(t)$, $f(t) = f_2(t)$, условия 1 и 2, из (5.2) имеем

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \frac{M_o}{a} L_o L \int_a^t \|u_1(s) - u_2(s)\| dx(s) + \frac{L_o}{a} \| (f_1(t))'_{x(t)} - (f_2(t))'_{x(t)} \|_C, \quad t \in [a, b].$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана [8] получим требуемую оценку (5.4). Теорема 5.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. НАТАНСОН И.П., **Теория функций вещественной переменной**, («Наука», Москва, 1974), стр 200, 250.
2. ТРИКОМИ Ф., **Интегральные уравнения**, (ИЛ, 1960).
3. BARBU V., SIAM L. **Math. Anal.** 6 (4) (1975).
4. BUGHGEIM A.L., **Volterra Equations and Inverse Problems**, (VSP, Utrecht-Tokyo, 1999), 204p.
5. DENISOV A.M., **Elements of the Theory of Inverse Problems**, (VSP, Utrecht-Tokyo, 1999), 272p.
6. ASANOV A., **Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the first kind** (VSP, Utrecht-Tokyo, 1998), 276p.
7. АСАНОВ А., Манас университети, **Табиғый Илимдер журналы**, 1 (Бишкек, 2001).
8. АСАНОВ А., Манас Университета, **Табиғый Илимдер журналы**, 2 (Бишкек, 2002).