РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Доц., др. Асан ОМУРАЛИЕВ
Кыргызско-Турецкий университет «Манас»

Данная работа посвящена численным методам решения краевой задачи для одного несамосопряжённого сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Предлагается новый метод основанный на синтезе метода регуляризации для сингулярно возмущенных задач и метода конечных элементов основанного на подходе Бубнова-Галеркина.

Сначало, методом регуляризации Ломова [1], исходная задача расширяется в пространство большой размерности, полученное при этом расширенное уравнение является уравнением с частными производными, но с постоянными коэффициентами и регулярным по малому параметру, когда малый параметр стремится к нулю. Особенностью этого метода является то, что главная часть расширенного уравнения наследует структуру исходного уравнения и решение метода конечных элементов на основе подхода Бубнова-Галеркина [2]-[7] представлено отвечающей структуре фундаментального решения. Такой подход позволяет рассматривать с единых позиций как жесткие, так нежесткие.

В предыдущих работах [8], [9] нами был предложен подход, который был основан на синтезе метода регуляризации Ломова и метода прямых [10], была построена устойчивая разностная схема. Показано, что такой подход позволяет исходную краевую задачу для дифференциального уравнения сводит к устойчивой задаче Коши для сеточного уравнения.

В данной статье изучается задачи

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon u'' - a(x)u' - b(x)u = f(x), \qquad x \in (0,1],$$
$$u|_{x=0}=0, \qquad u|_{x=1}=0 \tag{1}$$

при следующих предположениях:

1. *$\forall x \in [0,1]$ функция $a(x)<0$;*
2. *заданные функции $a(x), b(x), f(x)$ достаточно гладкие.*

Эта задача различными вариантами метода конечных элементов изучены в работах [5],[6],[7]. В [5] предлагается отыскивать приближенное решение задачи (1) в виде

$$u(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} C_k x^k \exp\left(-\frac{a(0)}{\varepsilon}x\right) + \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(x),$$

где C_k, c_k –неизвестные коэффициенты, $\varphi_k(x)$-базисные функции. Если определять решение задачи (1) в таком виде, то входящее в разложение экспоненциальная функция $exp(-a(0)x/\varepsilon)$ войдёт в подинтеграл в качестве сомножителя. В нашем подходе такое вхождение отсутствует. Работа [6] посвящена построению приближенного решения задачи (1) методом конечных элементов, полученная система Галеркина решается построением дискретной функции Грина. Здесь также экспоненциальная функция входит под знак интеграла. С помощью выделения особенностей в виде пограничного слоя в [7] строится приближённое решение методом Галеркина при помощи деления отрезка интегрирования на две части.

Отметим, что при ε->+0 в задаче (1) теряется только одно из граничных условий. На основании условия 1) пограничный слой возникает вдоль прямой x=0, поэтому, согласно методу Ломова [1], для регуляризации задачи наряду с независимой переменной x вводится только одна регуляризующая переменная по формуле

$$\xi=\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(s)ds.$$

Вместо искомой функции u(x,ε) введем в рассмотрение расширенную функцию $\tilde{u}$ (x,ξ,ε) такую, что

$$\tilde{u}(x,\xi,\varepsilon)|_{\xi=\varphi(x)/\varepsilon}\equiv u(x,\varepsilon).$$

Используя эти соотношения, найдем

$$u'(x,\varepsilon)\equiv\left(\partial_x\tilde{u}+\frac{1}{\varepsilon}\varphi'(x)\partial_\xi\tilde{u}\right)|_{\xi=\varphi(x)/\varepsilon},$$

$$u''(x,\varepsilon)\equiv\left(\partial_x^2\tilde{u}+\frac{1}{\varepsilon^2}(\varphi'(x))^2\partial_\xi^2\tilde{u}+2\frac{1}{\varepsilon}\varphi'(x)\,\partial_{x\xi}^2\tilde{u}+\frac{1}{\varepsilon}\varphi''(x)\partial_\xi\tilde{u}\right)|_{\xi=\varphi(x)/\varepsilon},$$

тогда для расширенной функции $\tilde{u}$ (x,ξ,ε) естественно поставить задачу

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{u}\equiv\varepsilon\,\partial_x^2\tilde{u}+\frac{1}{\varepsilon}a^2(x)T\tilde{u}-[a(x)\,\partial_x\tilde{u}-L_\xi\tilde{u}+b(x)\tilde{u}]=f(x),\ (x,\xi)\in Q,$$

$$\tilde{u}|_{x=\xi=0}=0,\ \tilde{u}|_{x=1}=0, \qquad (2)$$

где $Q=\{(x,\xi):x\in(0,1),\xi<0\}$, $T\equiv\partial_\xi^2-\partial_\xi$, причем

$$(\tilde{L}_\varepsilon\tilde{u})|_{\xi=\varphi(x)/\varepsilon}\equiv L_\varepsilon u(x,\varepsilon). \qquad (3)$$

Задача (2) регулярна по ε при ε->+0, расширенное уравнение (2) является уравнением с частными производными, но с постоянными коэффициентами. Кроме того в этом уравнении сохранена структура исходного уравнения, что позволяет находить решение отвечающее структуре фундаментального решения.

Уравнение (2) содержит оператор

$$D\equiv A_\varepsilon+B,\qquad A_\varepsilon\equiv\varepsilon\partial_x^2+\frac{1}{\varepsilon}a^2(x)T,\qquad B\equiv-a(x)\partial_x+L_\xi-b(x),$$

который не является симметричным в пространстве $H=L_2(0,1)$. Умножим (2) на произвольную функцию $v\in W_2^1$. Тогда приходим к равенствам

$$[u,v]+(Bu,v)=(f,v),$$

$$[u,v]=\int_0^1 A_e u(x)\, v(x)dx,$$

$$(g,h)=\int_0^1 g(x)h(x)dx,$$

где *[u,v]* энергетическое скалярное произведение. Пусть $H_A=\overset{0}{W}{}_2^1$ энергетическое пространство со скалярным произведением *[u,v]* и нормой $[u]=[u,u]^{1/2}$.

Рассмотрим расширенную задачу (2) с областью определения $Q=\{(x,\xi): x\in(0,1),\ -\infty<\xi<0\}$. Эту область покроем системой полос $\{x_{k-1}\le x\le x_k, \xi\le 0\}$ и для каждого $k\ge 1$ в H_A введем функцию, называемой базисной функцией

$$w_k(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x\le x_{k-1} \\ y_1(x) & x_{k-1}\le x\le x_k \\ y_2(x) & x_k\le x\le x_{k+1} \\ 0 & x_{k+1}\le x\le x_N=1 \end{cases}$$

где

$$y_1(x)=\frac{x-x_k}{\Delta x_{k+1/2}},\quad y_2(x)=\frac{x_{k+1}-x}{\Delta x_{k+1/2}},\quad \Delta x_{k+1/2}=x_{k+1}-x_k$$

Функции $\omega_k(x)$, $k=1,2,\ldots,N-1$ определенные таким образом в качестве области определения имеют весь отрезок [0,1]. Они непрерывны и отличны от нуля на интервале $x_{k-1}<x<x_{k+1}$, где состоит из двух линейных участков и достигают своего максимума, равного единице, в точке $x=x_k$. Такие функции обладают свойством, которое можно считать аналогом свойства полноты, причем справедливо следующие соотношение

$$\int_0^1 w_k(x)w_l(x)dx=\begin{cases} 0 & l\le k-2 \\ \frac{1}{6}(x_k-x_{k-1})=\frac{1}{6}\Delta x_{k-1/2} & l=k-1 \\ \frac{1}{3}(x_{k+1}-x_{k-1})=\frac{1}{3}(\Delta x_{k-1/2}+\Delta x_{k+1/2}) & l=k \\ \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)=\frac{1}{6}\Delta x_{k+1/2} & l=k+1 \\ 0 & l\ge k+2 \end{cases} \qquad (4)$$

Решение уравнения (2) при помощи метода Галеркина с конечными элементами отыскивается в виде

$$u_N(x,x)=\sum_{k=1}^{N-1} c_k\, w_k(x)exp(x)+\sum_{k=1}^{N-1} v_k\, w_k(x)+a(x)exp(x), \qquad (5)$$

где функция $a(x)=x(1-x)$ выбрана так, чтобы функция (5) удовлетворяла граничным условиям из (2). Подставовим выражение (5) в невязку $Ru \equiv \Delta u-f(x)$, затем, в соответствии с методом Галеркина, за счет составления внутреннего произведения $(R,w_l)=0$, получим

$$\int_0^1 R(x)w_l(x)dx=0,\ l=1,2,\ldots,N-1. \qquad (6)$$

Сначало вычислим действие операторов входящие в уравнение (2) на функцию $u_N(x,x)$ определённой формулой (5). Заметив, что слагаемые, кроме первой суммы функции (5), не зависит от ξ, а первая сумма обращает в тождество оператор

$$Tu_N(x,x) \equiv \partial_x^2 u_n-\partial_x u_n \equiv 0,$$

мы получим

$$A_e\, u_N(x,x)=\sum_{k=1}^{N-1}[ec_k exp(x)+ev_k]w_k''(x)+eexp(x)a''(x),$$

$$Bu_N(x,x)=\sum_{k=1}^{N}\{c_k exp(x)[a(x)w_k'(x)+b_1(x)w_k(x)]-v_k[a(x)w_k'(x)+b(x)w_k(x)]\}-$$

$$-q(x_0)exp(x),$$

где

$$b_1(x)=a'(x)-b(x),\ q(x)=-a(x)a'(x)-b_1(x)a(x).$$

На основании этих вычислений, для внутреннего произведения (6) получим

$$\sum_{k=1}^{N-1}\{c_k exp(x)\int_0^1[ew_k''(x)+a(x)w_k'(x)+b_1(x)w_k(x)]w_l(x)dx+$$

$$+v_k\int_0^1[ew_k''(x)-a(x)w_k'(x)-b(x)w_k(x)]w_l(x)dx\}-$$

$$-exp(x)\int_0^1[q(x)-ea''(x)]w_l(x)dx-\int_0^1 f(x)\,w_l(x)dx=0.$$

Интегрируем по частям интегралы содержащие вторые производные и воспользуемся тем, что $w_l(0)=w_l(1)=0$ и $w_k(x)=0$ для $x \in (x_{k-1},x_{k+1})$. Затем приравняем к нулю отдельно слагаемые содержащие экспоненциальные функции в качестве сомножителя и отдельно- без этого сомножителя, тогда мы получим систему двух линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения (5)

$$\sum_{k=1}^{N-1}a_{k,l}c_k=f_{1,l}, \qquad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}b_{k,l}v_k=f_{2,l},\ l=1,2,\ldots,N-1, \qquad (8)$$

где

$$a_{k,l}=\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}[ew_k'(x)w_l'(x)+a(x)w_k'(x)w_l(x)+b_1(x)w_k(x)w_l(x)]dx,$$

$$b_{k,l}=\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}[ew_k'(x)w_l'(x)-a(x)w_k'(x)w_l(x)-b_1(x)w_k(x)w_l(x)]dx\ ,$$

$$f_{1,l}=\int_0^1[q(x)-ea^2(x)]w_l(x)dx, \qquad f_{2,l}=\int_0^1 f(x)w_l(x)dx.$$

Метод Галеркина может применятся в случае общих операторов, анализ разрешимости систем (7)-(8) и сходимость последовательности Галеркина в общем случае очень сложен [2]. Если на заданные функции наложить условия обеспечивающие положительно определенности оператора $\widetilde{L}_e$, то последовательность Галеркина сходится к точному решению расширенной задачи (2), т.е. справедлива следующая сформулированная теорема.

<u>*Теорема.*</u> *Пусть выполнены услвоия 1)-2). Тогда при достаточно больших N и малых e>0 последовательность Галеркина (5) с постоянными $(c_1,c_2,\dots,c_N)$, $(v_1,v_2,\dots,v_N)$ однозначно определяемыми из систем (7)-(8) сходится к решению расширенной задачи (2).*

Хотя оператор D=A+B является несамосопряженным, но применимость метода Галеркина выполняется, так как оператор $A^{-1}B$ вполне непрерывен [4]. Этим показано выполнения условий теоремы 1 из [2], поэтому приближённые решения построенные методом Галеркина при $N\to\infty$ сходится к точному решению и приближённое решение задачи (2) определяется формулой (5), где коэффициенты c_k и v_k определяются из систем (7)-(8), разрешимость которых при достаточно малых $\varepsilon>0$ доказывается аналогично [2].

После того, как построено решение расширенной задачи (2) в виде (5), для получения решения исходной задачи (1) мы должны в (5) произвести сужение посредством регуляризующей функции. Для чего в обеих частях равенства (5) полагая

$$\xi=\frac{1}{e}\int_0^x a(x)dx$$

получим

$$u_{N,e}(x,j(x)/e)=\sum_{k=1}^{N-1}\{c_k exp(\frac{1}{e}\int_0^x a(x)dx)w_k(x)+v_k w_k(x)\}+$$
$$+a(x)exp(\frac{1}{e}\int_0^x a(x)dx).$$

Это выражение является приближенным решением исходной задачи (1) и при $N\to\infty$ сходится к точному решению исходной задачи (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. ЛОМОВ С.А. **Введение в общую теорию сингулярных возмущений**.-М.:Наука, 1981-400 с.
2. МАРЧУК Г.И., АГОШКОВ В.И. **Введение в теорию проекционно-сеточные методы**.-М.: Наука, 1981-416 с.
3. СТРЕНГ Г., Дж. ФИКС **Теория метода конечных элементов**.-М.: Мир, 1977-377 с.
4. МИХЛИН С.Г. **Вариационные методы в математической физике**.-М.:Наука, 1970-512 с.
5. БАХВАЛОВ Н.С., ЖИДКОВ Н.П., КОБЕЛЬКОВ Г.М. **Численные методы**.-М.: Наука, 1987-600 с.
6. Eugne O'RIORDAN, Martin STYNES **Analysis of difference shemes for singularly perturbed differentall equations using a discretized Green's function**. BAIL IV. Proceedings of the Fourth International Conference on Boundary and Iterior Layers-Computational and Asymptotic Methods, 1986, Novosibirsk, USSR.
7. БАГАЕВ В.М., ГРИГОРЬЕВА Е.А. **Квазилинейное уравнение с малым параметром при старшей производной**// Моделирование в механике-1988.-т.2,№2-с.29-46.
8. ОМУРАЛИЕВ А.С. **Вестник Ошского государственного университета**. Серия физмат. Наук, №4, 2001,с101-105.
9. ОМУРАЛИЕВ А.С. **Табигый илимдер журналы** , Манас университети, №2, 2002, с.134-143.
10. БЕРЕЗИН И.С., ЖИДКОВ Н.П., **Методы вычислений**. II.-М.:1962, 639.