

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВНУТРЕННИМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Проф. др. Асан ОМУРАЛИЕВ

Кыргызско-Турецкий университет «Манас»,
инженерный факультет

В статье изучается задача Коши для двух типов параболических уравнений с малым параметром при старшей производной. В этих уравнениях при вырождении не теряются ни гладкость, ни часть граничных условий, являющиеся условиями возникновения явления пограничного слоя. Показано, что и в данном случае вдоль характеристик предельных уравнений наблюдается явление параболического пограничного слоя. Построена регуляризованная асимптотика решения любого порядка, содержащего параболический пограничный слой.

В п.1 изучается уравнение

$$L_{1,\varepsilon}u \equiv \partial_t u - \varepsilon^2 a(x) \partial_x^2 u = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \quad (1.A)$$

а в п.2 уравнение

$$L_{2,\varepsilon}u \equiv \partial_t u - \varepsilon^2 a(x) \partial_x^2 u + b(x) \partial_x u = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \quad (1.B)$$

при начальном условии

$$u|_{t=0} = h(x), \quad (2)$$

где $\Omega \in R \times (0, T]$, $R = (-\infty, +\infty)$, $\partial_x \equiv \partial/\partial x$, $\varepsilon > 0$ - малый параметр.

Задачи будут изучаться при следующих предположениях:

1. функции $b(x), a(x), h(x) \in C^\infty(R)$, $f(x,t) \in C^{\infty,0}(\overline{\Omega})$;
2. $\forall x \in R$ функция $a(x) > 0$.

Известно [2],[3], что при вырождении дифференциальных уравнений высокого порядка в уравнения низкого порядка, если происходит потеря части

граничных условий или гладкости решения, то наблюдается явление пограничного слоя. В работе показано, что явление пограничного слоя наблюдается всегда вдоль характеристики предельного (при $\varepsilon \rightarrow 0$) уравнения.

П.1. В данном пункте изучается задача (1.A),(2). Вырожденное (предельное) уравнение отвечающее уравнению (1.A), имеет характеристику $x=0$, поэтому введем регуляризующую переменную [1]

$$\xi = \varphi(x)/\varepsilon, \quad \varphi(0) = 0. \quad (3)$$

Зависимость функции $\varphi(x)$ только от переменной x диктуется тем, что коэффициент $a(x)$ имеет такую зависимость и пограничный слой возникает вдоль $x=0$. Вид функции $\varphi(x)$ будет определен ниже, а пока она произвольна. Переменная ξ вводится наряду с независимыми переменными x, t .

Вместо искомой функции $u(x, t, \varepsilon)$ введем в рассмотрение расширенную функцию $\tilde{u}(M, \varepsilon)$ ($M=(x, t, \xi)$) такую, что сужение посредством регуляризующей функции совпадало с искомой:

$$\tilde{u}(M, \varepsilon)|_{\xi=\varphi(x)/\varepsilon} \equiv u(x, t, \varepsilon). \quad (4)$$

Используя (3),(4), найдем

$$\partial u / \partial x \equiv (\partial \tilde{u} / \partial x + (\varphi'(x)/\varepsilon) \partial \tilde{u} / \partial \xi)|_{\xi=\varphi(x)/\varepsilon},$$

$$\partial^2 u / \partial x^2 \equiv (\partial^2 \tilde{u} / \partial x^2 + (1/\varepsilon^2) D_\xi \tilde{u} + (1/\varepsilon) L_\varphi \tilde{u})|_{\xi=\varphi(x)/\varepsilon},$$

$$D_\xi \equiv (\varphi'(x))^2 \partial^2 / \partial \xi^2,$$

следующим условием выбора является то, чтобы уравнение (7) приняло простейший вид и решение которого отвечало структуре фундаментального решения [4] исходного уравнения при сужении посредством регуляризующей функции. Сказанное обеспечивается, если $\varphi(x)$ выбирается как решение задачи

$$a(x) (\varphi'(x))^2 = 1, \varphi(0) = 0,$$

откуда найдем

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}.$$

Выбор знака не влияет на процесс построения решения, поэтому нами выбран положительный знак. При этом, если $x \in R_1 = (-\infty, 0]$, то переменная $\xi \in R_1 = (-\infty, 0]$, а при $x \in R_2 = [0, +\infty)$ переменная $\xi \in R_2 = [0, +\infty)$.

Так как задача (5),(6) регулярна по ε , то естественно определять ее решение в виде

$$\tilde{u}(M, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(M). \quad (8)$$

Подставив (8) в (5),(6) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , мы получим следующие итерационные задачи:

$$T_1 u_0 = f(x, t), u_0|_{t=0} = h(x), \quad (9_0)$$

$$T_1 u_i = a(x) L_\varphi u_{i-1} + L_x u_{i-2}, \quad u_i|_{t=0} = 0, \quad (9_i)$$

$\forall(x, t, \xi) \in I$ í áððóáí î óñòáí î áèòù î òáí èó

$$|u_0(x, t, \xi)| < c[1 + \exp(-\frac{\xi^2}{8t})]. \tag{11}$$

Í áðáéáái ê ñëääóðùáé èðáðäöèíííé çääà-á, äëý ÷ááí
 í ðááááðèòáéúí î áù-èñèèì í ðááóð ÷ànòù

$$f_1(x, t, \xi) = a(x)[2\varphi_j'(x)h'(x) + \varphi_j''(x)h(x)](-\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{\xi^2}{4t})) \text{ npu } M \in H_1,$$

$$f_2(x, t, \xi) = a(x)[2\varphi_j'(x)h'(x) + \varphi_j''(x)h(x)]\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{\xi^2}{4t}) \text{ npu } M \in H_2,$$

òí áää äëý í áðí áääáí èý Òóí èöèé $w_{1j}(x, t, \xi)$, $v_1(x, t)$ í î èó÷èì çääà÷è

$$T_1 w_{1j} = c_{1j}(x) \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{\xi_j^2}{4t}), \quad w_{1j}|_{t=0} = 0, \quad j=1, 2,$$

$$c_{1j}(x) = (-1)^j a(x)[2\varphi_j'(x)h'(x) + \varphi_j''(x)h(x)]$$

$$\partial_t v_1(x, t) = 0, \quad v_1(x, 0) = 0.$$

Đáðáí èý èí òí ðùò çàí èðòðñý

$$w_{11}(x,t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{s}} \bar{n}_{11}(x) \int_0^t \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{\pi s(t-s)}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4s}\right) \left[\exp\left(-\frac{(\xi-\tau)^2}{4(t-s)}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi+\tau)^2}{4(t-s)}\right) \right] d\tau ds,$$

$$w_{12}(x,t,\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \bar{n}_{12}(x) \int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi s(t-s)}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4s}\right) \left[\exp\left(-\frac{(\xi-\tau)^2}{4(t-s)}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi+\tau)^2}{4(t-s)}\right) \right] d\tau ds,$$

$$v_1(x,t) = 0,$$

Οόί εοέϋ $u_1(x,t,\xi)$ εὶ ἀὰ ἰοάί εὸ ἀεᾶ (11). Ἰ οὶ ἀοεὶ , οὐί Οόί εοέϋ $v_1(x,t)$ ἢ ἰ ἀ-ἀοί ὀὶ ε εὶ ἀεῆἢ ε ἀοάοὸ δααί ὀ οὶ ἀαἢοααί ἰ ἰ ἰ οεϐ.

Ααεᾶ, ἰ ἰ ἀοί δϋϋ γοἰ ο ἰ δἰ οἰἢ, ἰ ὀ ἰ ἰ ἀεἰ ἰ ἰ δαᾶεεοὺ ἀἢ Οόί εοέϋ $w_{ij}(x,t,\xi_j)$, $v_i(x,t)$, $i \geq 0$, ἀ, ἢεᾶἰ ἀοἀεὺἰ ἰ, ἀἢ εἰ γΟεεοεᾶί οὀ δϋᾶ (8). Ἰ ἰ ἢδᾶἢοᾶἰ ἰ δᾶοεϋδεϑοϐ ὀᾶε Οόί εοέϋ ἰ δἰ εϑᾶᾶἰ ἢοᾶἰ εᾶ n - ἰ ε ἀἢοε-ἰ ἰ ε ἢοἰ ἰ ὀ γοἰ ἢ δϋᾶ ε ἰ ἢί ϑἰ ἀ-εὶ γοὸ ἀἢοεοὸ-ἰ οϐ ἢοἰ ἰ ο ἀδᾶϑ $u_{en}(x,t)$.

Ἐἢ ἰ εϋϑόϋ ἰ δεἰ οεἰ ἰ ἀεἢεἰ οἰ ἀ, ἰ ἀοδᾶἰ ἰ ἢ ἰ εᾶϑοὺ ἢεᾶοϐ ὀοϐ οᾶἰ δᾶἰ ο.

Οᾶἰ δᾶἰ ἀ. Ἰ οἢοὺ a ἰ ἰ εἰ ἢ ἰ ὀἢεἰ ἀεϋ 1) ε 2). Οἰ ᾶᾶ ἢἰ δᾶᾶᾶεεᾶᾶ ἰ οᾶἰ εᾶ

$$|u(x,t,\varepsilon) - u_{\varepsilon n}(x,t)| < c_n \varepsilon^{n+1}, \quad n=0,1,2, \dots$$

ааа $u(x,t,\varepsilon)$ - òí ÷ í í á ðáøáí èá çääà÷è (1),(2), $u_{\varepsilon n}(x,t)$ - íí ñòðíáííá áúøá ñóæáí èá n - í é ÷ àñòè÷í é ñòì ì ù ðýää (8), íí ñòðíáí àü $c_n > 0$ í áçääèñýúàý í ò ε .

П.2. В этом пункте изучаются задачи (1.B),(2). В данном случае вырожденное уравнение имеет характеристику

$$t=B(x), \quad B(x)=\int_0^t \frac{ds}{b(s)}$$

и поэтому вводится регуляризующая переменная зависящая от разности $B(x)-t$, т.е. в виде

$$\xi=\varphi(B(x)-t)/\varepsilon.$$

Для расширенной функции найдем

$$\partial_t u \equiv (\partial_t \tilde{u} + (\varphi(B(x)-t)/\varepsilon)'_t \partial_\xi \tilde{u})|_{\xi=\varphi(x,t,\varepsilon)}$$

$$\partial_x u \equiv (\partial_x \tilde{u} + (\varphi(B(x)-t)/\varepsilon)'_x \partial_\xi \tilde{u})|_{\xi=\varphi(x,t,\varepsilon)}$$

$$\partial^2 u / \partial \xi^2 \equiv (\partial^2 \tilde{u} / \partial \xi^2 + (1/\varepsilon^2) D_\xi \tilde{u} + (1/\varepsilon) L_\varphi \tilde{u})|_{\xi=\varphi(x,t,\varepsilon)},$$

$$D_\xi \equiv ((\varphi(B(x)-t))'_x)^2 \partial_\xi^2$$

$$L_\varphi \equiv [2(\varphi(B(x)-t))'_x \partial^2 / (\partial x \partial \xi) + (\varphi(B(x)-t))''_x \partial / \partial \xi].$$

Поступая аналогично п.1, получим расширенную задачу

$$T_\varepsilon \tilde{u} \equiv \partial_t \tilde{u} - a(x) D_\xi \tilde{u} + b(x) \partial_x \tilde{u} - \varepsilon a(x) [L_\varphi \tilde{u} + \varepsilon \partial^2 \tilde{u} / \partial x^2] = f(x,t), \quad (2.1)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = h(x). \quad (2.2)$$

Отметим, что сужение решения этой задачи дает решение исходной задачи (1.B),(2).

Νέααού ἰ.1, δάαόεϋδὲςορῖορ ὀόί εὐερ ἀϋάαδαί εαὲ δαοάί εα ἡάαορῖοάε ςάά÷ε:

$$a(x) ((\varphi(B(x)-t))'_x)^2 = 1, \varphi(0) = 0,$$

откуда найдем

$$\varphi(B(x)-t) = \int_0^{B(x)-t} \frac{b(B^{-1}(s+t)) ds}{\sqrt{a(B^{-1}(s+t))}},$$

причем при $B(x) \leq t$ переменная $\xi \in (-\infty, 0]$, а при $B(x) \geq t$ переменная $\xi \in [0, +\infty)$.

Δαοάί εα ςάά÷ε (2.1),(2.2) άόάι ἰἰ δάάάεϋοῦ ἀ ἀεά δϋάα (8), ε ἀεϋ εἰ ὤοεοεάί οἰ ἀ ἰἰ εὐ÷εἰ εδάδαοεἰ ἰἰ ὕα ςάά÷ε ἀí ἀεἰ ἀε÷ί ὕα (9). Ἄ άάί ἰἰ ἡεὐ÷ά ὀ, εἰ άαὐ ἡάαορῖοεὲ ἀεά

$$\partial_t = \partial_t - \partial_\xi^2 + b(x)\partial_x.$$

Óóí èòèþ u_i áóááí îí ðáááèÿóü à èèàññá Óóí èòèé (10). Í áðáí à ñèááááí í á á èáááððáðí í é ñèí áéá îí èñúáááð èááúé îí áðáí è-í úé ñèí é, à áðí ðí á- ñèááááí í á í ðááúé îí áðáí è-í úé ñèí é ááí èü ðàðàèðáðèñòèèé $t = B(x)$. Óáí áéáðáí ðèì Óóí èòèþ (10) í á-àèúí îí ó óñèí àèþ, äèÿ ÿòí áí áúááðáí ñèááááí úá ñèááóþúèì í áðáçí ì :

$$w_{0j}(x,0) = h(x), \quad w_{ij}(\bar{0},0,\xi) = 0, \quad j=1,2, \quad v_i(x,0) = 0, \quad i \geq 0.$$

Óóí èòèÿ u_0 èç (10) áóááð ðáðáí èáì çááá-è (9₀), áñèè á ñèááááí úá îí ðáááèÿþòñÿ èáè ðáðáí èÿ çááá-:

$$Tw_{0j} = 0, \quad w_{0j}|_{t=0} = h(x), \quad j=1,2,$$

$$\partial_t v_0(x,t) + b(x)\partial_x v_0 = f(x,t), \quad v_0(x,0) = 0$$

Ðáðáí èÿ ÿòèð çááá- ñóúáñòáóþò è ì í áóð áúòü çáí èñáí ú á áèáá

$$v_0(x,t) = \int_0^t f(B^{-1}(B(x)-t-s),s) ds,$$

$$w_{01} = h(B^{-1}(B(x)-t)) \left[1 - 2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\xi}{2\sqrt{t}}} \exp(-v^2) dv \right],$$

